A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A   Z   T O P O L O G I Ą

WPPT 4r., sem. letni
EGZAMIN POPRAWKOWY

Wrocław, 27 czerwca 2013

ZADANIE 1
(a) (4p) Podać definicje rodziny skierowanej i ciągu uogólnionego (netu).
(b) (4p) Sprawdź, że podzbiory skończone ustalonego zbioru są rodziną skierowaną względem zwykłej inkluzji.
(c) (4p) Podaj dwa aksjomaty przeliczalności przestrzeni topologicznej.

ZADANIE 2
(a) (4p) Sformułować twierdzenia o odwzorowaniu otwartym, o wykresie domkniętym i o odwzorowaniu odwrotnym (dbając o szczegóły w założeniach i tezach).
(b) (4p) Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha, a $T\colon X \to Y$ przekształceniem ciągłym. Udowodnić, że jeśli $T(X)$ jest zbiorem domkniętym, to $T\colon X \to T(X)$ jest odwzorowaniem otwartym (gdy w $T(X)$ rozważamy topologię odziedziczoną z Y).
(c) (4p) Niech c_{00} będzie przestrzenią ciągów, które zerują się od pewnego miejsca. Wprowadzamy w niej normę supremum. Uzasadnić, że przekształcenie $T\colon c_{00} \to c_{00}$ dane wzorem

$$T(x_n) = (nx_n)$$

ma wykres domknięty. Czy jest ono ciągłe?

ZADANIE 3
(a) (4p) Podaj definicję miary spektralnej na przestrzeni mierzalnej.
(b) (4p) Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ oznacza przestrzeń dwuelementową (z sigma-ciałem wszystkich podzbiorów). Określamy miarę spektralną $E : \Omega \to L^2([-1,1])$ wzorami

$$(E(\{\omega_1\})f)(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad (E(\{\omega_2\})f)(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

(i oczywiście na zbiorze pustym operator zerowy, a na całej Ω – tożsamościowy). Niech ϕ będzie funkcją rzeczywistą określoną na Ω wzorami $\phi(\omega_1) = 1, \phi(\omega_2) = -1$. Czymż jest operator $T_\phi = \int \phi \, dE$ (tzn. podaj wzór na $T_\phi(f)$ dla $f \in L^2([-1,1])$).
(c) (4p) Podać definicje operatora: normalnego, hermitowskiego, unitarnego. Uzasadnić, dlaczego projekcja ortogonalna na domkniętą podprzestrzeń właściwą nie może być unitarna.

Powodzenia!